

训练 3: 若函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x+m, & x < e \\ x-\ln x, & x \geq e \end{cases}$ 的值域是 $[e-1, +\infty)$,

则实数 m 的取值范围是_____.

解析: 当 $x \geq e$ 时, $(x-\ln x)' = 1 - \frac{1}{x} > 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单增, 值域是 $[e-1, +\infty)$. 当 $x < e$ 时, $-\frac{1}{2}x+m$ 是减函数, 其值域是 $(-\frac{e}{2}+m, +\infty)$.

因此 $(-\frac{e}{2}+m, +\infty) \subseteq [e-1, +\infty)$. 于是 $-\frac{e}{2}+m \geq e-1$, 解得 $m \geq \frac{3e}{2}-1$. 即实数 m 的取值范围是 $[\frac{3e}{2}-1, +\infty)$.

4. 查解函数不等式

例 4. (2018 年高考课标 I 卷文 12) 设函数 $f(x) =$

$\begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ 则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1]$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, 0)$

法 1 (图像法): 首先根据分段函数的解析式, 画出对应范围内的图像.

从图像中可以看出, 要使 $f(x+1) < f(2x)$ 成立, 必须且只须 $\begin{cases} 2x < 0, \\ 2x < x+1, \end{cases}$ 解得 $x < 0$.

故选 D.

法 2 (特殊值法): 取 $x = -\frac{1}{2}$,

则 $f(-\frac{1}{2}+1) = f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(2 \cdot (-\frac{1}{2})) = f(-1) = 2$. 因此, $f(-\frac{1}{2}+1) < f(2 \cdot (-\frac{1}{2}))$, 适合不等式 $f(x+1) < f(2x)$, 排除 A, B.

再取 $x = -1$, 则 $f(-1+1) = f(0) = 1$, $f(2 \cdot (-1)) = f(-2) = 4$,

因此 $(-1+1) < f(2 \cdot (-1))$, 适合不等式 $f(x+1) < f(2x)$, 排除 C. 故选 D.

点评: 本题是已知函数值的大小, 反过来确定自变量的取值范围, 属于逆向设置问题. 主要考查分段函数的图像、单调性与数形结合的思想. 法 1 是根据分段函数的解析式, 快速准确地画出分段函数的图像来确定单调性和等价的不等式组, 再求自变量的范围. 法 2 则是利用特殊值法, 根据“命题在一般情况下为真, 则在特殊情况下也为真”、“命题在特殊情况下为假, 则在一般情况下也为假”迅速排除错误答案. 对于某些有关函数的图像、函数值、参数范围、函数不等式、最值等问题的选择题, 有时运用“特殊值法”, 往往事半功倍.

训练 4: (2017 年高考课标 III 卷理 15) 设函数 $f(x) =$

$\begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}$ 则满足 $f(x) + f(x-\frac{1}{2}) > 1$ 的 x 的取值范围是_____.

解析: 数 $0, \frac{1}{2}$ 将 x 轴分成三段, 分别讨论:

(1) 当 $x \leq 0$ 时, $x - \frac{1}{2} < 0$, 则 $x+1 + x - \frac{1}{2} + 1 > 1$, 所以 $-\frac{1}{4} < x \leq 0$.

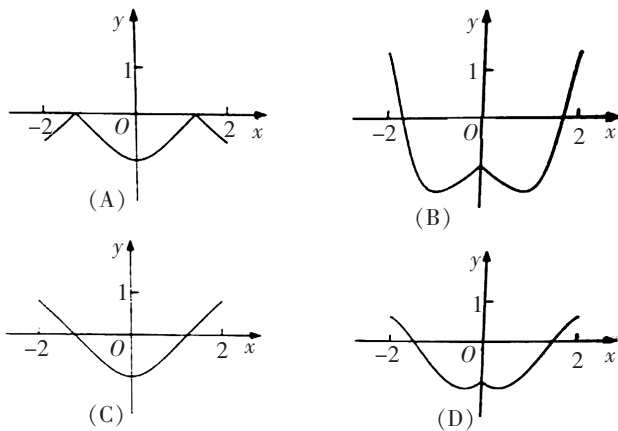
(2) 当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $x - \frac{1}{2} \leq 0$, 则 $2^x + x - \frac{1}{2} + 1 > 1$, 所以 $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

(3) 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $x > 0$, 则 $2^x + 2^{(x+\frac{1}{2})} + 2 > 1$, 所以 $x > \frac{1}{2}$.

综上所述, 满足 $f(x) + f(x-\frac{1}{2}) > 1$ 的 x 的取值范围是 $(-\frac{1}{4}, +\infty)$.

5. 考查函数图像

例 5. 函数 $y = 2x^2 - e^{|x|}$ 在 $[-2, 2]$ 上的图像大致为 ()



解析: $y = f(x) = \begin{cases} 2x^2 - e^x, & (0 \leq x \leq 2) \\ 2x^2 - e^{-x}, & (-2 \leq x < 0) \end{cases}$ 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f'(x) = 4x - e^x$. 此时, $f'(\frac{1}{4}) = 1 - e^{\frac{1}{4}} < 0$, 立即排除 A 和 C. 又计算 $f(2) = 8 - e^2 < 8 - 2.7^2 < 1$, 排除 B. 故选 D.

点评: 本题具有一定的思维深度, $y = 2x^2 - e^{|x|}$ 是超越复合函数, 用传统方法往往无法画出其图像. 其实符号 $|x|$ 就暗示我们可以分类变成分段函数来处理. 解这种非常规型函数的图像问题, 要注意灵活运用导数法和特殊值法进行处理.

训练 5: (2018 年南昌市模考卷理 8) 函数 $y = x^2 - e^{|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的图像可能是 ()

